# Probewettbewerb 2022 - Lösungshinweise

## Aufgabe 1 – *In der Küche* – 7 Punkte -

Zunächst wird in 40 Minuten der Gugelhupf vorbereitet. Er kommt dann für 50 Minuten in den Ofen. Währenddessen wird der Fisch zubereitet (insgesamt 60 Minuten lang). Nach 50 Minuten wird der Gugelhupf aus dem Ofen genommen. Nach weiteren 10 Minuten ist der Fisch fertig vorbereitet und kommt für 20 Minuten in den Ofen. Währenddessen wird mit der Vorbereitung des Hühnchens begonnen (insgesamt 30 Minuten). Nach 20 Minuten wird der Fisch aus dem Ofen genommen. Das Hühnchen wird in weiteren 10 Minuten fertig vorbereitet und kommt dann noch für 10 Minuten in den Ofen.

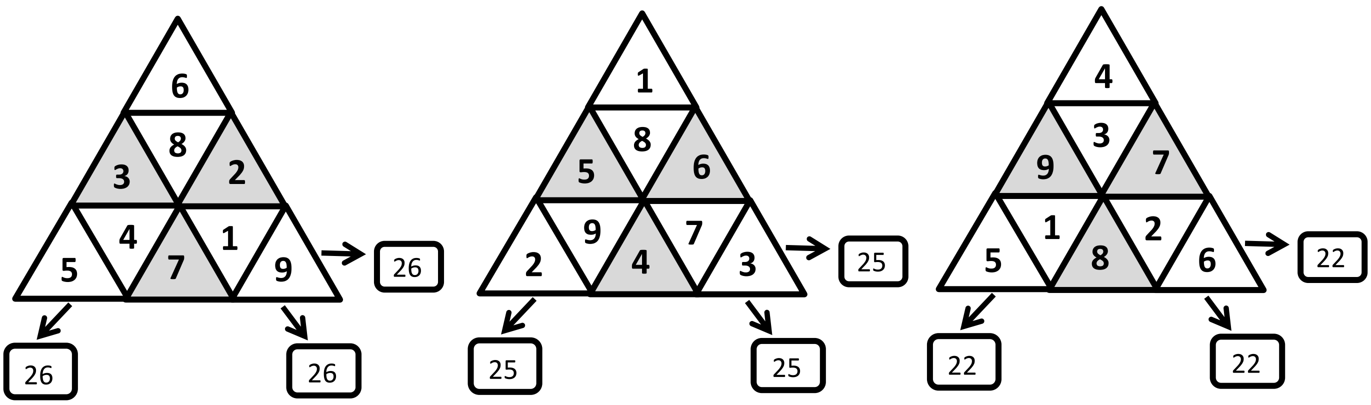
**Insgesamt dauert die Zubereitung des Menüs 140 Minuten oder 2 Stunden und 20 Minuten.**

| Zeit (in min) | 40 | 50 | 10 | 20 | 10 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Gugelhupf | Vorbereitung | Ofen | | | | |
| Fisch | | Vorbereitung | | Ofen | | |
| Hühnchen | | | | Vorbereitung | | Ofen |

## Aufgabe 2 – *In der Summe* – 5 Punkte –

*Hinweis: Eine Lösung genügt, eine Begründung ist nicht verlangt.*

Wenn man die drei Summen, die sich entlang der Dreiecksseiten ergeben, addiert, zählt man sechs Zahlen doppelt (hier in den weißen Feldern) und drei Zahlen einfach (hier in den grauen Feldern).
Sei S die Summe der Zahlen entlang einer Dreiecksseite und T die Summe der Zahlen in den grauen Feldern. Dann gilt $3S = 2(1 + 2 + ... + 9) - T = 90 - T$
T ist damit ein Vielfaches von 3. In den grauen Feldern müssen daher Zahlen stehen, deren Summe durch 3 teilbar ist.
Es gibt viele Lösungen. Hier sind drei Lösungen dargestellt für T = 12 und damit S = 26, T = 15 und damit S = 25 sowie T = 24 und damit S = 22.



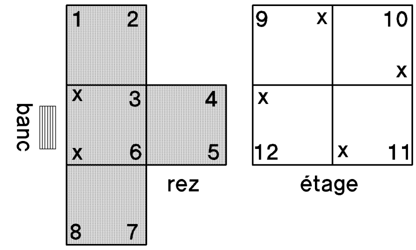
## Aufgabe 3 – *In Paaren* – 7 Punkte -

Die Summe der drei zweistelligen Zahlen ist kleiner als 300. Es gilt also a = 1 oder a = 2.
Es soll gelten:
10a + b + 10b + c + 10c + a = 100a + 10b + c => b + 10c = 89a

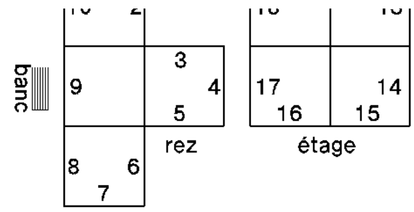
- Aus a = 1 folgt damit b = 9 und c = 8.
- Aus a = 2 folgt damit b = 8 und c = 17. Da c $\leq$ 9 gilt, liefert das keine weitere Lösung.

**Es gibt genau eine dreistellige Zahl, die diese Gleichung erfüllt, nämlich 198. (**19 + 98 + 81).

## Aufgabe 4 – *Im Neonlicht* – 5 Punkte -

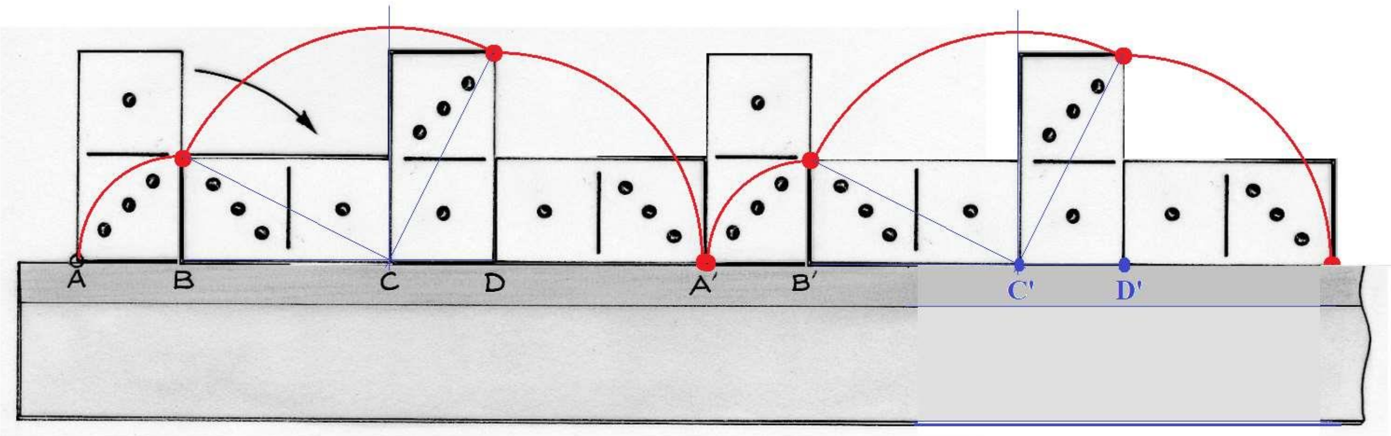



Die Skizzen zeigen jeweils links den Grundriss des Erdgeschosses und rechts den Grundriss des oberen Stockwerks. Das kleine Rechteck links außen stellt die Bank dar.




- Die Bodenfläche des Erdgeschosses besteht aus 4 Quadraten.
- In den beiden oberen Grundrissen sind die vertikalen Außenkanten mit den Ziffern 1-12 bezeichnet.
  Die mit x bezeichneten Kanten sind keine Außenkanten des Körpers. Der Körper hat 12 vertikale Außenkanten der Länge 5m.
  **Die Gesamtlänge dieser Kanten beträgt 60 m**.
- In den beiden unteren Grundrissen sind die einzelnen quadratischen vertikalen Außenflächen mit den Ziffern 1 – 18 bezeichnet
  **Die gesamte vertikale Außenfläche beträgt**
  **18 · 25 m² = 450 m².**

## Aufgabe 5 – *Im Steinumdrehen* – 7 Punkte -



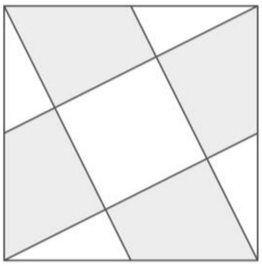

Die Länge der Bahn ist die Summe der Längen der sieben Kreisbögen, deren Radien nacheinander 2 , $2\sqrt{5}$ , 4 , 0 , 2 , $2\sqrt{5}$ und 4 betragen.

**Die Länge der Bahn beträgt $(\pi + \pi\sqrt{5} + 2\pi) \cdot 2\ cm$ ≈ 32,90 cm.**

*Eine Zeichnung in wahrer Größe befindet sich im Anhang.*

Mathématiques SANS Frontières

## Aufgabe 6 – *Im Flur* – 5 Punkte -



Fläche der fünf quadratischen Fliesen:
$5 \cdot 50^2 = 12\,500\ \text{cm}^2$

Seitenlänge des Quadrats: $\sqrt{\mathbf{12\,500}}\ \boldsymbol{cm}$ $(\approx 111{,}8\ \text{cm})$

*Eine Zeichnung im Maßstab 1 :10 befindet sich im Anhang.*

## Aufgabe 7 – *Im Verzug* – 7 Punkte -

Die analogen Uhren unterscheiden nicht zwischen Uhrzeiten nach Mitternacht und Uhrzeiten nach 12 Uhr mittags (a.m. und p.m.).
Nach einer Stunde liegen die angezeigten Uhrzeiten 3 Minuten auseinander, nach zwei Stunden 6 Minuten usw. Nach 20 Stunden liegen die angezeigten Uhrzeiten also 60 Minuten, das heißt 1 Stunde auseinander.
Die beiden Uhren zeigen zum ersten Mal wieder dieselbe Uhrzeit an, wenn sie genau 12 Stunden auseinanderliegen, also nach 12 · 20 h = 240 h oder 10 Tagen.
Die eine Uhr geht dann 240 · 2 Minuten = 480 Minuten vor, also 8 Stunden.
Die andere Uhr geht dann 240 Minuten nach, also 4 Stunden.
Nach 10 Tagen ist es wieder genau 12 Uhr mittags. Beide Uhren zeigen dann 8 Uhr an.

**Nach genau 10 Tagen zeigen beide Uhren wieder dieselbe Uhrzeit an – 8 Uhr.**

## Aufgabe 8 – *Im Weltraum* – 5 Punkte -

Nach 4 Jahren besteht der Stamm aus $2^4 = 16$ Lebewesen, nach 5 Jahren besteht er aus $2^5 = 32$ Lebewesen.
Danach steigt die Anzahl der Lebewesen pro Jahr um 18.
**Nach 10 Jahren besteht der Stamm aus 32 + 5 · 18 = 112** Lebewesen**.**

Der Sachverhalt kann auch in einer Tabelle dargestellt werden.

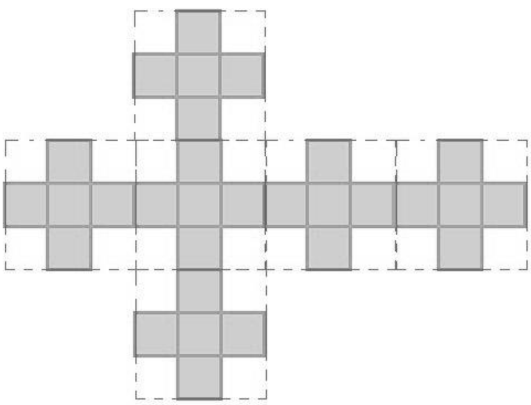
| Jahr | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Individuen | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 40 | 58 | 76 | 94 | 112 |
| Zunahme | +1 | +2 | +4 | +8 | +16 | +18 | +18 | +18 | +18 | +18 |

## Aufgabe 9 – *Im Netz* – 7 Punkte -

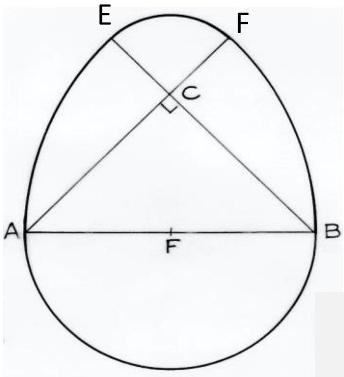
Hier ist ein mögliches Netz dargestellt.

**Der Körper hat 30 Seitenflächen.**

*Ein Netz in wahrer Größe auf einem DIN A4-Blatt befindet sich im Anhang.*



## Aufgabe 10 – *Im Oval* – 10 Punkte -




Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ABC gilt mit Pythagoras
AC = BC = $3\sqrt{2}$ cm
Wegen BE = AB = 6 cm gilt CE = $6 - 3\sqrt{2}$ cm
Länge des Kreisbogens von E nach F: $\frac{1}{4}(6 - 3\sqrt{2}) \cdot 2\pi = \frac{6-3\sqrt{2}}{2}\pi$
Der Halbkreisbogen von A nach B misst $3\pi$.
Länge der Kreisbögen von A nach E und von F nach B:

$$\frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 6\pi = \frac{3}{2}\pi$$

Umfang des Eis: U = $\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\pi + 3\pi + 2 \cdot \frac{3}{2}\pi = 9\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$

**Der Umfang des Eis beträgt ungefähr 21,6 cm.**

*Eine Zeichnung in wahrer Größe befindet sich im Anhang.*

## Aufgabe 11 – *Im Wald* – 5 Punkte -

*Möglichkeit 1: Mit Pythagoras*

Im Dreieck MHD gilt $MD^2 = 20^2 + 10^2 = 500$
Im Dreieck MIB gilt $MB^2 = 10^2 + 30^2 = 1\,000$
Im Dreieck BDE gilt $BD^2 = 20^2 + 10^2 = 500$
Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist das Dreieck MDB rechtwinklig in D.
Und es ist gleichschenklig.

**Der Winkel DMB beträgt daher 45°.**

*Möglichkeit 2: Trigonometrisch*

$$\tan \widehat{\mathrm{IMB}} = \tan \widehat{\mathrm{HMB}} = \frac{\mathrm{IB}}{\mathrm{IM}} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\tan \widehat{\mathrm{HMD}} = \frac{\mathrm{HD}}{\mathrm{MH}} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

$$\widehat{\mathrm{DMB}} = \mathrm{Arctan}\ (3) - \mathrm{Arctan}\ (0{,}5) = 45°$$

## Aufgabe 12 – *Im Quadrat* – 7 Punkte -

Sei n die Zahl, an die Delphine denkt.
Es gibt zwei natürliche Zahlen a und b mit $n + 10 = a^2$ und $n + 79 = b^2$.
Durch Subtrahieren erhält man $b^2 – a^2 = (b + a)(b – a) = 69$.
69 lässt sich nur auf zwei Arten in Faktoren zerlegen: $69 = 1 \cdot 69$ und $69 = 3 \cdot 23$.

*1. Fall (69 = 1 · 69)*

$$\begin{aligned} b + a &= 69 \\ b - a &= 1 \end{aligned}$$ Die Lösung des LGS ist b = 35 und a = 34.

Man erhält $n = 34^2 – 10 = 1\,146$ und $n = 35^2 – 79 = 1\,146$

*2. Fall (69 = 3 · 23)*

$$\begin{aligned} b + a &= 23 \\ b - a &= 3 \end{aligned}$$ Die Lösung des LGS ist b = 13 und a = 10.

Man erhält $n = 10^2 – 10 = 90$ und $n = 13^2 – 79 = 90$

**Die Zahl, an die Delphine denkt, ist entweder 90 oder 1 146.**

*Bemerkung: Die Aufgabe kann auch durch geschicktes Probieren oder die Verwendung der Beziehung $(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1$ gelöst werden. (Damit ergibt sich $2a + 1 = 69$ und $a = 34$.)*

## Aufgabe 13 – *Im Verhältnis* – 10 Punkte -

Die Dreiecke AFD, BEA und ADC sind ähnlich, weil ihre Winkel gleich groß sind.
Daher sind die Verhältnisse entsprechender Seitenlängen gleich:

$$\frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}$$

*(Seitenlänge der jeweils längeren durch Seitenlänge der jeweils kürzeren Kathete)*

Sei FC = x. Mit FC = AE = EF folgt AF = 2x.

Man erhält $\frac{\mathrm{DF}}{x} = \frac{2x}{\mathrm{DF}}$

Es ergibt sich $2x^2 = \mathrm{DF}^2$ und $x = \mathrm{DF}/\sqrt{2}$

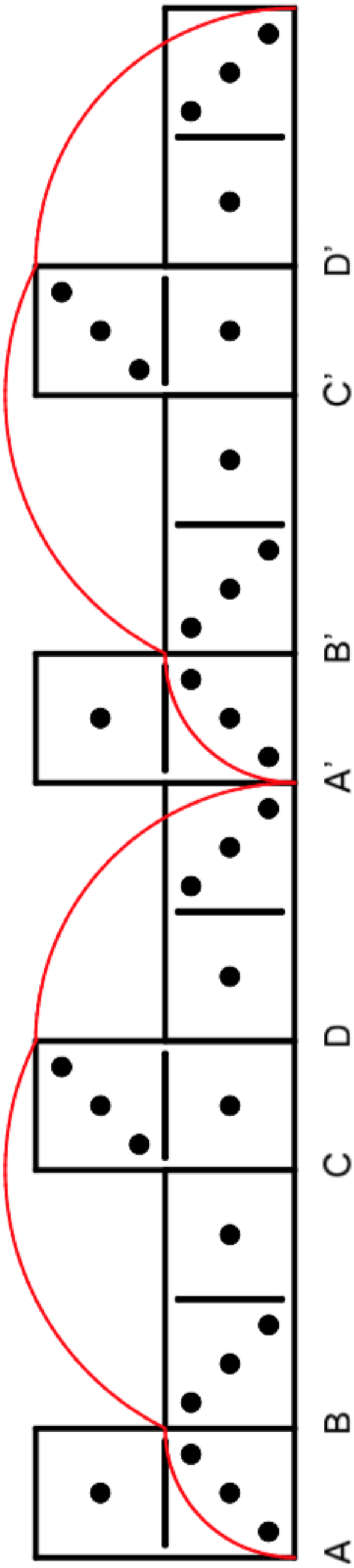
$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{FC}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{x}} = = \frac{\mathrm{DF}}{\frac{\mathrm{DF}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{AD}{DC} = \sqrt{2} \;\; und\; DC = 10 => \;\; \mathrm{AD} = 10\sqrt{2}$$

**Die exakte Länge der Strecke AD beträgt $10\sqrt{2}$**

*Im Anhang befindet sich eine Zeichnung in wahrer Größe.*

**Anhang zu Aufgabe 5 - *Im Steinumdrehen***



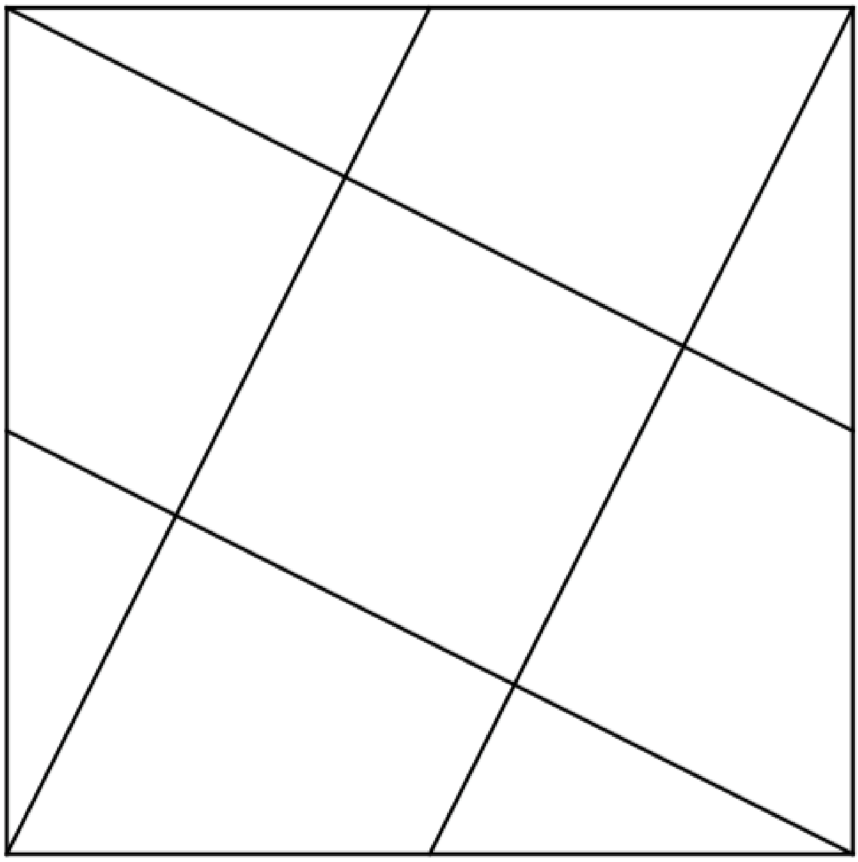

**Wahre Größe**

Mathématiques SANS Frontières

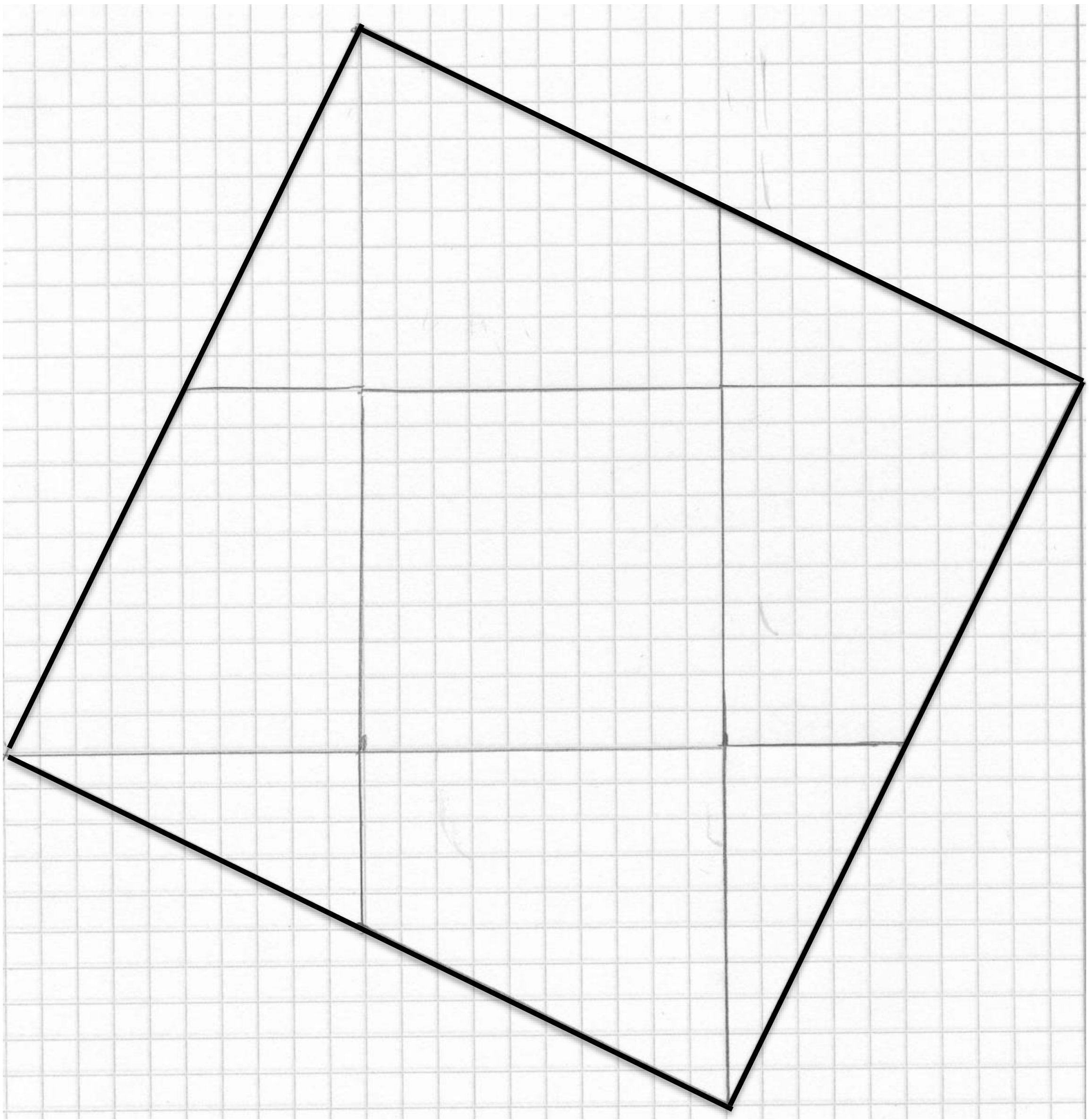
**Anhang zu Aufgabe 6 -** ***Im Flur***

**Maßstab 1:10**

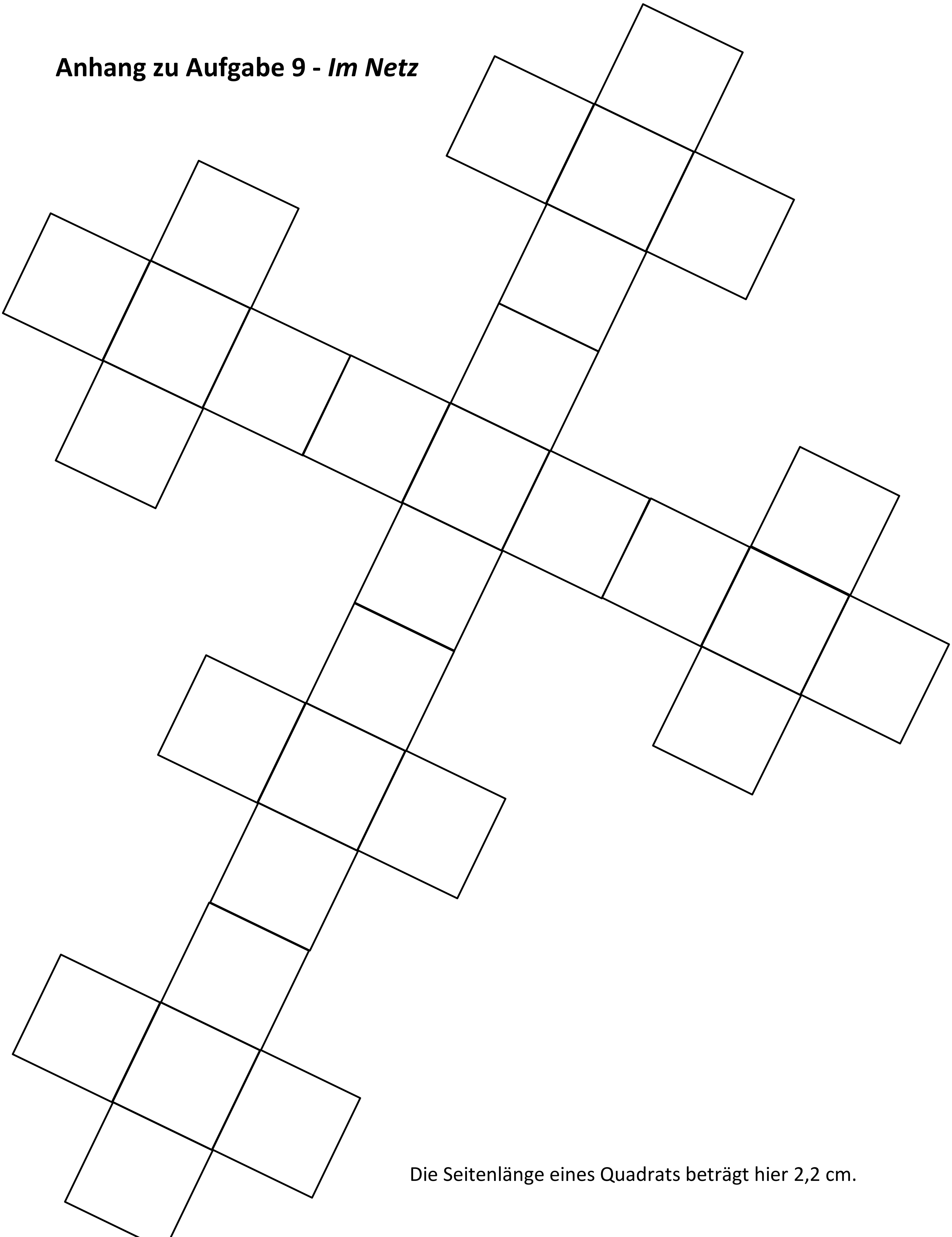
Die Seitenlänge des Quadrats beträgt ungefähr 11,2 cm



Auf kariertem Papier :



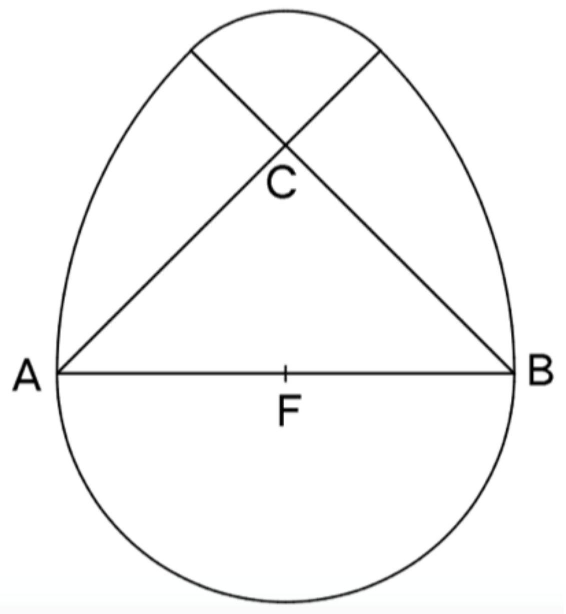
**Anhang zu Aufgabe 9 -** ***Im Netz***



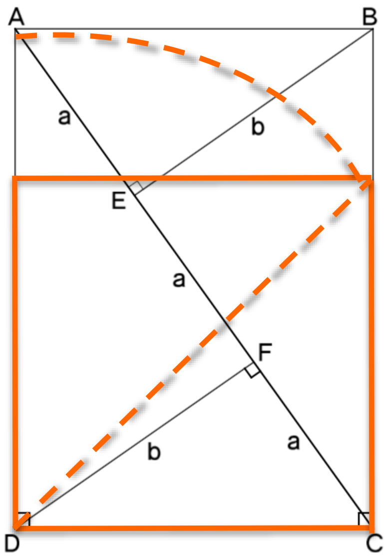
Die Seitenlänge eines Quadrats beträgt hier 2,2 cm.

**Anhang zu Aufgabe 10 - *Im Oval***

**wahre Größe**



**Anhang zu Aufgabe 13 - *Im Verhältnis***




## Wahre Größe

*Hinweis:*
*Man zeichnet ein Quadrat der Seitenlänge 10 cm, verlängert eine Seite und trägt dann die Länge der Diagonalen des Quadrats ab.*

## Wahre Größe